

Pourquoi des graphes ?

Vous utilisez chaque jour des applications, Instagram, TikTok, Snapchat... qui vous suggèrent des comptes à suivre, identifient vos « amis communs » ou vous recommandent du contenu. Comment font-elles ?

Derrière ces fonctionnalités se cache une structure mathématique/informatique appelée **graphe**. Un graphe permet de représenter des **objets** (personnes, villes, pages web...) et des **relations** entre eux (amitiés, routes, liens hypertexte...).

La théorie des graphes permet de répondre à des questions comme :

- Comment Instagram sait-il que vous avez peut-être des amis en commun avec un inconnu ?
- Quel est l'itinéraire le plus court de Montivilliers à Nice ?
- Est-ce que tout le monde dans un réseau social est relié, même indirectement ?

1 Graphes non orientés

1.1 Sommets et arêtes

Le réseau social du lycée

Dans un lycée, sept élèves utilisent un réseau social où la relation d'amitié est telle que celle de Facebook, on est ami avec une personne si et seulement si celle-ci est amie avec nous. On note leurs prénoms : **Alice, Baptiste, Chloé, Dylan, Emma, Félix, Gaëlle**.

Les amitiés mutuelles sont les suivantes :

- Alice et Baptiste sont amis,
- Alice et Emma sont amies,
- Baptiste et Chloé sont amis,
- Baptiste et Dylan sont amis,
- Chloé et Félix sont amis,
- Dylan et Emma sont amis,
- Emma et Félix sont amis,
- Félix et Gaëlle sont amis.

Exercice 1 — Graphe d'un réseau

1. Représenter ce réseau par un schéma : un cercle par élève, un trait pour chaque amitié.

2. Combien d'amis Félix possède-t-il ?

.....

3. Alice souhaite envoyer un message à Gaëlle, mais elle ne peut écrire qu'aux personnes avec qui elle est amie. En passant par des intermédiaires, quel chemin peut-elle emprunter ?

.....

.....

4. Le réseau social affiche un badge « Amis proches » quand deux personnes ont au moins deux amis en commun. Donner un duo d'amis proche.

.....

.....

Définition 1 — Graphe non orienté

Un **graphe non orienté** est composé de deux éléments :

- un ensemble de **sommets** (on les représente par des cercles) ;
- un ensemble d'**arêtes** (on les représente par des traits).

Chaque arête relie deux sommets. Une arête entre s_1 et s_2 est notée $\{s_1, s_2\}$. Les arêtes sont **non orientées** : $\{s_1, s_2\}$ et $\{s_2, s_1\}$ désignent la même arête.

Définition 2 — Sommets adjacents et voisins

Deux sommets sont dits **adjacents** s'ils sont reliés par une arête. On dit aussi que l'un est **voisin** de l'autre.

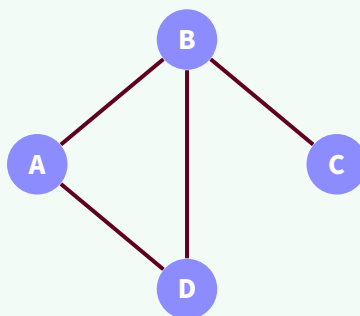
1.2 Degré d'un sommet

Définition 3 — Degré d'un sommet

Le **degré** d'un sommet s , noté $\deg(s)$, est le nombre de voisins de s , c'est-à-dire le nombre d'arêtes qui lui sont reliées.

Exemple 1 — Degré d'un sommet

On considère le graphe suivant :



- A est relié à B et D : donc $\deg(A) = 2$.
- B est relié à A , C et D : donc $\deg(B) = 3$.
- C est relié à B et D : donc $\deg(C) = 1$.
- D est relié à A , B et C : donc $\deg(D) = 2$.

Propriété 1 (Lemme des poignées de main). Dans tout graphe non orienté, la somme des degrés de tous les sommets est égale au **double du nombre d'arêtes** :

$$\sum_{\text{sommet } s} \deg(s) = 2 \times (\text{nombre d'arêtes}).$$

i Pourquoi ?

Chaque arête relie exactement deux sommets : elle contribue pour 1 au degré de chacune de ses deux extrémités, donc pour 2 à la somme totale des degrés. En additionnant sur toutes les arêtes, on compte donc chaque arête exactement deux fois.

Exemple 2 — Poignées de main

On vérifie le lemme des poignées de main sur l'exemple précédent.

$$\deg(A) + \deg(B) + \deg(C) + \deg(D) = 2 + 3 + 1 + 2 = 8 = 2 \times 4.$$

Le graphe a bien 4 arêtes.

Exercice 2 — Degrés sur le réseau social du lycée

On reprend le graphe du réseau social du lycée.

1. Recopier et compléter le tableau suivant :

Sommet	A	B	C	D	E	F	G
Degré							

2. Calculer la somme des degrés.

3. Compter le nombre d'arêtes du graphe, puis vérifier la propriété du lemme des poignées de mains.

4. Sur ce réseau social, l'algorithme de suggestion d'amis propose en priorité les personnes ayant le plus grand degré. Qui serait suggéré en premier à Gaëlle ?

1.3 Chemins et distance

Définition 4 — Chemin et longueur

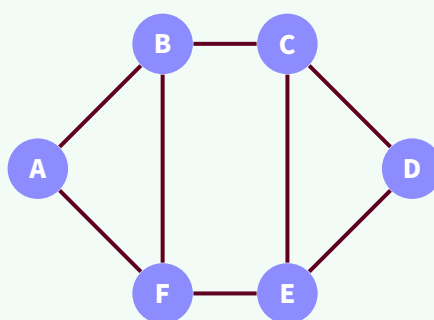
Un **chemin** est une suite de sommets reliés les uns aux autres par des arêtes. La **longueur** d'un chemin est son nombre d'arêtes.

Définition 5 — Distance entre deux sommets

La **distance** entre deux sommets s_1 et s_2 , notée $d(s_1, s_2)$, est la longueur du plus court chemin reliant s_1 à s_2 .

Exemple 3 — Chemin et distance

On considère le graphe suivant :



On cherche à relier A à D .

Un premier chemin : $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$, de longueur 3.

Un autre chemin : $A \rightarrow F \rightarrow E \rightarrow D$, de longueur 3.

Un chemin plus long : $A \rightarrow B \rightarrow F \rightarrow E \rightarrow C \rightarrow D$, de longueur 5.

Existe-t-il un chemin de longueur 2 entre A et D ? Non : A n'est voisin que de B et F , qui ne sont eux-mêmes pas voisins de D .

On conclut donc que la **distance** entre A et D vaut :

$$d(A, D) = 3.$$

⚠ Attention

Il peut exister **plusieurs chemins de longueur minimale** entre deux sommets (ici $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$ et $A \rightarrow F \rightarrow E \rightarrow D$). La distance est la longueur de l'un quelconque de ces plus courts chemins.

Exercice 3 — Chemins dans le réseau social du lycée

On reprend le réseau social du lycée.

1. Donner un chemin de Dylan (D) à Gaëlle (G). Quelle est sa longueur?

.....

.....

.....

2. Existe-t-il un chemin plus court?

.....

.....

3. Calculer les distances suivantes :

— $d(C, G)$

— $d(A, G)$

— $d(B, G)$

— $d(D, C)$

— $d(F, F)$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4. Alice (A) et Dylan (D) ne se connaissent pas directement. Par quel(s) intermédiaire(s) pourraient-ils entrer en contact? Y a-t-il plusieurs possibilités?

.....

.....

.....

1.4 Connexité

Définition 6 — Graphe connexe

Un graphe est dit **connexe** si, pour toute paire de sommets, il existe au moins un chemin les reliant. Autrement dit : on peut aller de n'importe quel sommet à n'importe quel autre.

Exercice 4 — Connexité du réseau social du lycée

1. Le graphe du lycée est-il connexe? Justifier en une phrase.

.....

.....

2. On supprime le sommet F (Félix quitte le réseau). Le graphe est-il encore connexe? Justifier. Que peut-on dire de l'importance de Félix dans ce réseau?

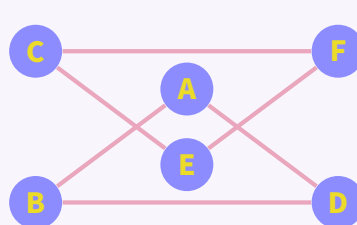
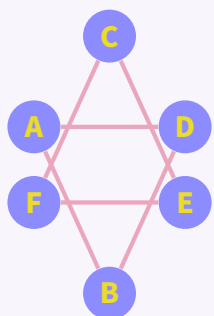
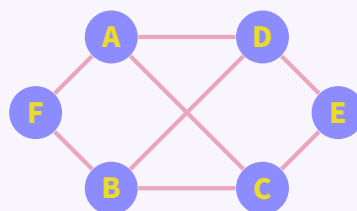
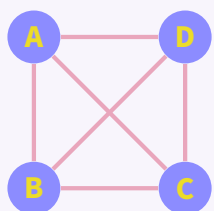
.....

.....

.....

Exercice 5 — Connexité

Pour chaque graphe ci-dessous, indiquer s'il est **connexe** ou **non connexe**.



1.5 Diamètre

 **Un petit monde**

En 1967, le psychologue Stanley Milgram a émis l’hypothèse que deux personnes quelconques dans le monde sont reliées par une chaîne d’au plus 6 intermédiaires, c’est la théorie des **six degrés de séparation**.

Les réseaux sociaux numériques ont permis de tester cette idée à grande échelle. En 2016, une étude sur Facebook a montré que la distance moyenne entre deux utilisateurs quelconques était de... **3,57**.

C’est directement lié à la notion de **diamètre** d’un graphe : la plus grande distance entre deux sommets quelconques.

Définition 7 — Diamètre d’un graphe

Le **diamètre** d’un graphe connexe est la plus grande distance entre deux sommets :

$$\text{diamètre} = \max_{s_1, s_2 \in S} d(s_1, s_2).$$

Exercice 6 — Diamètre du réseau du lycée

1. Compléter le tableau des distances entre tous les sommets :

$d(\cdot, \cdot)$	A	B	C	D	E	F	G
A	0						
B		0					
C			0				
D				0			
E					0		
F						0	
G							0

2. Déterminer le diamètre du graphe.

.....

.....

3. Interpréter ce résultat dans le contexte du réseau social.

.....

.....

1.6 Excentricité, rayon et centre

Définition 8 — Excentricité d'un sommet

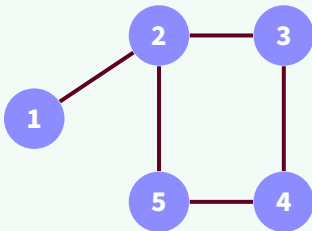
L'**excentricité** d'un sommet s est la distance maximale entre s et n'importe quel autre sommet du graphe :

$$e(s) = \max_{t \in S} d(s, t).$$

C'est la distance au sommet le plus éloigné de s .

Exemple 4 — Excentricité

On considère le graphe suivant :

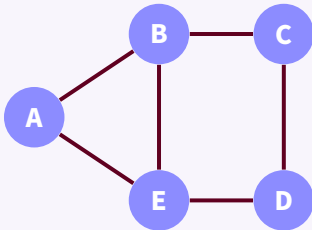


	$d(\cdot, 1)$	$d(\cdot, 2)$	$d(\cdot, 3)$	$d(\cdot, 4)$	$d(\cdot, 5)$	$e(s)$
$s = 1$	0	1	2	3	2	3
$s = 2$	1	0	1	2	1	2

Le sommet 1 a donc une excentricité de 3 et le sommet 2 a une excentricité de 2.

Exercice 7 — Excentricité

On considère le graphe suivant :



- Calculer les distances $d(A, B)$, $d(A, C)$, $d(A, D)$, $d(A, E)$.
.....
- En déduire $e(A)$.
.....
- Calculer l'excentricité de chaque sommet et compléter le tableau :

Sommet s	A	B	C	D	E
Excentricité $e(s)$					

Définition 9 — Rayon et centre d'un graphe

Soit G un graphe connexe.

- Le **rayon** de G est la plus petite excentricité :

$$\text{rayon} = \min_{s \in S} e(s).$$

- Le **centre** de G est l'ensemble des sommets dont l'excentricité est égale au rayon. Ce sont les sommets les mieux placés du graphe.

i Rayon et diamètre

On a toujours :

$$\text{rayon} \leq \text{diamètre} \leq 2 \times \text{rayon}.$$

Le centre est toujours plus proche de tout le monde que les sommets extrêmes.

Exercice 8 — Rayon et centre

On reprend le graphe et le tableau de l'exercice précédent.

1. Déterminer le rayon du graphe.

.....

.....

2. Déterminer le centre du graphe.

.....

.....

3. Quel(s) sommet(s) est/sont le(s) plus éloigné(s) de tout le monde? (Autrement dit : quel(s) sommet(s) a/ont l'excentricité la plus grande?)

.....

.....

.....

4. Vérifier la relation $\text{rayon} \leq \text{diamètre} \leq 2 \times \text{rayon}$ en calculant d'abord le diamètre.

.....

.....

.....

.....

Exercice 9 — Le réseau du lycée

On reprend le graphe du réseau social du lycée ($S = \{A, B, C, D, E, F, G\}$) et le tableau des distances complété précédemment.

1. Calculer l'excentricité de chaque sommet et compléter le tableau :

Sommet s	A	B	C	D	E	F	G
Excentricité $e(s)$							

2. Déterminer le rayon et le centre du graphe.

.....

.....

3. Déterminer le diamètre et vérifier la relation $\text{rayon} \leq \text{diamètre} \leq 2 \times \text{rayon}$.

.....

.....

4. Interpréter le centre dans le contexte du réseau social : que peut-on dire de l'élève qui correspond au centre ?

.....

.....

5. Si Félix (F) quitte le réseau, le graphe n'est plus connexe. Peut-on encore parler de diamètre, de rayon, de centre ? Pourquoi ?

.....

.....

 Centre d'un réseau social

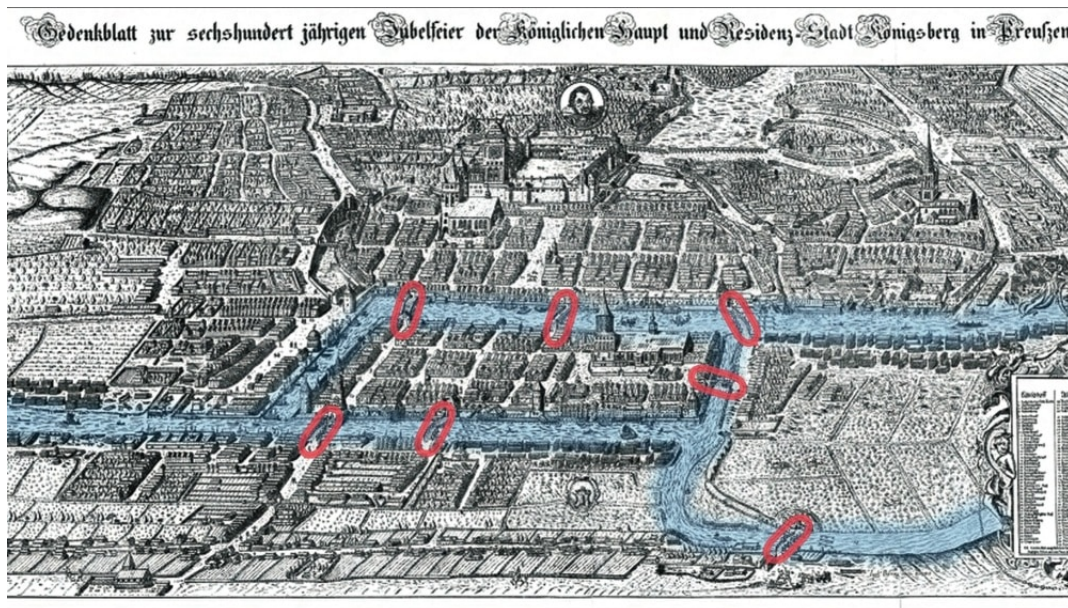
Dans un vrai réseau social, le centre du graphe correspond aux personnes les plus « centrales » : elles sont proches de tout le monde, ce qui leur permet de diffuser une information rapidement à l'ensemble du réseau.

C'est exactement ce que les algorithmes de détection d'influenceurs cherchent à identifier. Un compte au centre du graphe n'a pas forcément le plus grand nombre d'abonnés, mais il est le mieux positionné pour que son contenu circule.

1.7 Ca devient intéressant !

Le problème de Königsberg

La ville de Königsberg avait 7 ponts qui traversent une rivière telle qu'illustrée ci-après. Euler se demanda s'il était possible de faire une promenade en traversant tous les ponts une seule fois et revenir à son point de départ. En représentant le problème par un graphe, on peut alors reformuler la question de la promenade d'Euler ainsi : peut-on parcourir toutes les arêtes du graphe une unique fois et revenir à notre point de départ ?



Exercice 10 — Modéliser et conclure

On modélise la ville par un graphe :

- chaque zone de terre est un sommet ;
- chaque pont est une arête.

1. Proposer un graphe (schéma) représentant les 7 ponts.

2. Calculer le degré de chaque sommet.

.....

.....

3. Le graphe est-il connexe?

.....

4. A votre avis, peut-on répondre à la question d'Euler? Si oui, justifier. Sinon, proposer une modification.

.....

.....

.....

Définition 10 — Chemin eulérien et cycle eulérien

Dans un graphe non orienté $G = (S, A)$:

- un **chemin eulérien** est un chemin qui passe **exactement une fois** par chaque arête;
- un **cycle eulérien** est un chemin eulérien qui est en plus un **cycle**.

Propriété 2 (Critère d'Euler). Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté **connexe**.

- G possède un **chemin eulérien** (non fermé) si et seulement s'il possède exactement **deux** sommets de degré impair.
- G possède un **cycle eulérien** si et seulement si tous ses sommets sont de degré **pair**.

2 Graphes orientés

i Abonnements sur Instagram

Sur Facebook, si Alice est amie avec Baptiste, alors Baptiste est forcément ami avec Alice : la relation est **symétrique**. C'est pourquoi on la modélise avec des traits.

Sur Instagram ou TikTok, ce n'est pas le cas : Alice peut suivre Baptiste sans que Baptiste la suive en retour. La relation d'abonnement n'est **pas symétrique**.

Pour modéliser cette situation, un simple trait ne suffit plus : il faut indiquer le **sens** de la relation. On utilise pour cela des **flèches**.

i Abonnements Instagram

On reprend nos sept élèves. Cette fois, chaque flèche $X \rightarrow Y$ signifie « X suit Y ».

Les abonnements sont les suivants :

- Alice suit Baptiste et Emma ;
- Baptiste suit Chloé ;
- Chloé suit Félix ;
- Dylan suit Alice et Emma ;
- Emma suit Félix ;
- Félix suit Gaëlle ;
- Gaëlle suit Alice.

Exercice 11

1. Représenter ce réseau par un schéma : un cercle par élève, une flèche $X \rightarrow Y$ si X suit Y .

2. Y a-t-il des élèves qui se suivent mutuellement ?

.....

.....

Définition 11 — Graphe orienté et arc

Un **graphe orienté** est composé de :

- un ensemble de **sommets** ;
- un ensemble d'**arcs**, où chaque arc est une flèche d'un sommet vers un autre.

Un arc de s_1 vers s_2 est noté (s_1, s_2) et représenté par une flèche $s_1 \rightarrow s_2$.

Contrairement aux arêtes, (s_1, s_2) et (s_2, s_1) sont deux arcs **distincts**.

Définition 12 — Chemin orienté

Un **chemin orienté** est une suite de sommets $(s_0, s_1, \dots, s_k)$ telle que chaque arc (s_i, s_{i+1}) existe dans le graphe.

Le sens des flèches doit être **strictement respecté** : on ne peut pas remonter une flèche.

Exemple 5 — Chemin orienté

Dans le graphe des abonnements :

- (A, B, C, F, G) est un chemin orienté de longueur 4 : les arcs (A, B) , (B, C) , (C, F) et (F, G) existent tous.
- (G, A, E, F) est un chemin orienté de longueur 3.
- (B, A) n'est **pas** un chemin orienté : l'arc (B, A) n'existe pas — Baptiste ne suit pas Alice.

⚠ Attention

Dans un graphe non orienté, on peut parcourir une arête dans les deux sens. Dans un graphe orienté, une flèche $A \rightarrow B$ ne permet d'aller **que de A vers B**. Remonter la flèche est interdit.

Exercice 12 — Chemins orientés dans le réseau Instagram

On reprend le graphe orienté des abonnements.

1. Le chemin (D, A, B, C, F, G) est-il un chemin orienté valide ? Vérifier arc par arc.

.....

.....

.....

2. Existe-t-il un chemin orienté de Gaëlle (G) vers Dylan (D) ? Si oui, le donner. Sinon, expliquer pourquoi.

.....

.....

3. Une publication de Alice peut-elle atteindre Gaëlle en suivant les flèches d'abonnement ? Donner

le chemin si oui.

4. Une publication de Gaëlle peut-elle atteindre Baptiste ? Donner le chemin si oui, expliquer sinon.

Viralité et graphes orientés

Lorsqu'un contenu est publié sur un réseau social, il se propage en suivant les arcs du graphe orienté des abonnements : une publication de X est vue par tous ceux qui suivent X , puis par tous ceux qui suivent ces personnes, et ainsi de suite.

Plus un compte est bien placé dans le graphe, c'est-à-dire atteignable depuis de nombreux sommets, plus son contenu a de chances de devenir viral. C'est l'une des informations qu'exploitent les algorithmes de recommandation pour décider quels contenus booster.