Représentation des données	Chap 01	Algèbre de Boole

Algèbre de Boole

1.1 Un peu d'histoire

George Boole et la naissance d'une logique bivaluée

Au XIXe siècle, le mathématicien **George Boole** propose de représenter les raisonnements logiques à l'aide d'expressions manipulées comme des formules algébriques.
Les affirmations ne peuvent être que :

VRAI ou FAUX.

Dans l'algèbre de Boole, ces valeurs peuvent être écrites de différentes manières :

$$\text{Vrai} = 1 = \top, \qquad \text{Faux} = 0 = \bot.$$

(Ainsi, selon le contexte, programmer, calculer ou démontrer reviennent souvent à manipuler ces deux symboles.)

Au XXe siècle, Claude Shannon montre que l'algèbre de Boole décrit parfaitement les circuits électriques (portes logiques). Elle devient alors le fondement de toute l'informatique moderne.

1.2 Fonctions, variables et expressions booléennes

Valeurs booléennes

L'algèbre de Boole repose sur un ensemble à deux éléments :

$$\mathbb{B} = \{0, 1\}$$

où l'on identifie :

$$1 = \top = \text{Vrai}, \qquad 0 = \bot = \text{Faux}.$$

Les valeurs booléennes apparaissent dans les conditions, les circuits logiques, la logique formelle, etc.

Variables booléennes

Une **variable booléenne** est un symbole (souvent $a, b, c, \ldots$) dont la valeur appartient à :

$$a \in \mathbb{B}$$

Autrement dit, une variable booléenne peut valoir soit 0, soit 1.

Expressions booléennes

Une **expression booléenne** est une combinaison de variables et d'opérateurs logiques :

$$\overline{a}, \qquad a \cdot b, \qquad a + \overline{b}, \qquad \overline{a \cdot b} + c, \dots$$

Chaque expression s'évalue nécessairement en une valeur de $\{0, 1\}$.
Exemple :

$$E = \overline{a} + (b \cdot c)$$

Dans cette expression, on manipule les variables booléennes a, b, c, et le résultat final sera soit 0, soit 1.

Fonction booléenne

Une **fonction booléenne** de n variables est une application :

$$f : \mathbb{B}^n \longrightarrow \mathbb{B}$$

Elle prend une ou plusieurs variables en entrée et renvoie une valeur booléenne.
Exemples typiques (en notation NSI) :

$$f(a) = \overline{a}, \qquad g(a, b) = a \cdot b, \qquad h(a, b, c) = a + \overline{b \cdot c}.$$

Une fonction booléenne peut toujours être décrite par une **table de vérité** qui indique sa valeur pour chaque combinaison des variables.

1.3 Opérateurs logiques

Notations

Pour chaque opérateur, écrire les différentes notations possibles :

- **NON** : opérateur de négation _____ = _____ = _____
- **ET** : opérateur de conjonction _____ = _____ = _____
- **OU** : opérateur de disjonction _____ = _____ = _____

Priorité des opérateurs

- la négation $^{-}$ s'applique toujours en premier ;
- l'opérateur ET $(\cdot)$ est évalué avant l'opérateur OU $(+)$;
- les parenthèses ont la priorité absolue.

On considère l'expression suivante :

$$E = \overline{a} + b \cdot \overline{c}$$

1. Donner l'ordre d'évaluation des opérations (sans calculer le résultat) :

----

2. Réécrire l'expression en ajoutant les parenthèses qui montrent clairement l'ordre de priorité :

1.4 Tables de vérité

Exercice 1 — Opérateur NON

Compléter :

a	$\overline{a}$
0	
1	

Interprétation :

Exercice 2 — Opérateur ET

Compléter :

a	b	$a \cdot b$
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

Décrire $a \cdot b$:

Exercice 3 — Opérateur OU

Compléter :

a	b	$a + b$
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

Décrire $a + b$:

Équivalence de deux expressions

En algèbre de Boole, deux expressions sont dites **équivalentes** lorsqu'elles ont **exactement la même table de vérité**. Autrement dit, elles donnent le même résultat pour toutes les valeurs de leurs variables.
On peut noter cette équivalence de plusieurs façons :

$$E_1 = E_2 \qquad \text{(notation algébrique)}$$

$$E_1 \equiv E_2 \qquad \text{(notation employée en logique propositionnelle)}$$

$$E_1 \iff E_2 \qquad \text{(notation logique "si et seulement si")}$$

Dans tous les cas, ces écritures signifient que les deux expressions sont logiquement identiques.

1.5 Identités élémentaires

Catégorie	**Expression**	**Résultat**
Involution	$\overline{\overline{a}}$	
Element Neutre	$a \cdot 1$ $a + 0$	
Element Absorbant	$a \cdot 0$ $a + 1$	
Idempotence	$a \cdot a$ $a + a$	
Complément	$a \cdot \overline{a}$ $a + \overline{a}$	
Commutativité	$a \cdot b$ $a + b$	
Associativité	$(a \cdot b) \cdot c$ $(a + b) + c$	
Distributivité	$a \cdot (b + c)$ $a + (b \cdot c)$	
Lois De Morgan	$\overline{a \cdot b}$ $\overline{a + b}$	

1.6 Identifier une fonction à partir d'une table

Exercice 4 — Analyse de deux fonctions

Fonction $f(a, b)$

a	b	f(a,b)
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	0

Fonction $g(a, b)$

a	b	g(a,b)
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

Questions :

1. Déduire une expression pour $f(a, b)$.

----

2. Déduire une expression pour $g(a, b)$.

----

3. Vérifier en recalculant les tables.